

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ РІДИНИ Л.ЕЙЛЕРА

Виділимо в масиві рідини, що знаходиться в стані спокою, елементарних розмірів об'єм в формі паралелепіпеда з гранями

dx, dy, dz , паралельними осям координат (рис.). На виділений об'єм діють сили гідростатичного тиску на його грані та масові сили. Позначимо p - гідростатичний тиск в точці A (центр тяжіння лівої грані), направлений перпендикулярно грані і паралельно осі OX .

Оскільки тиск в рідині, що знаходиться в рівновазі, є функцією координат, то в точці B (центр тяжіння правої грані паралелепіпеда) приріст тиску на

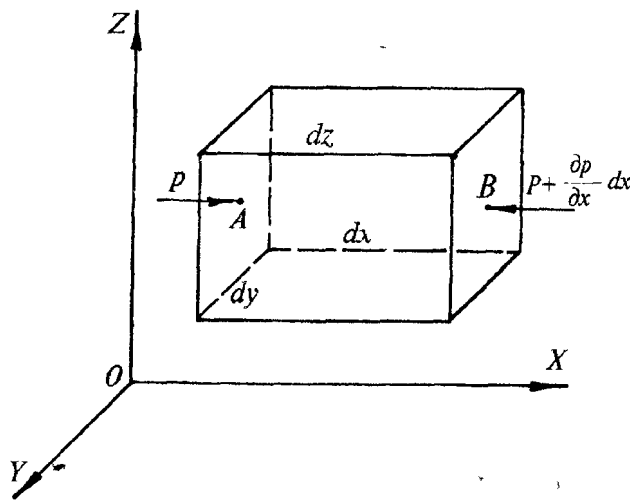
довжині dx буде $\frac{\partial p}{\partial x} dx$, де $\frac{\partial p}{\partial x}$ -

градієнт тиску, характеризує зміну тиску p на одиницю довжини осі OX . Тому тиск в точці B буде:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Враховуючи, що площі правої та лівої граней дорівнюють $dy \cdot dz$, сума проекцій сил гідростатичного тиску в напрямку осі OX буде:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$



Розглядаючи аналогічно тиск на грані, перпендикулярні осям OY та OZ , отримаємо суми проекцій сил тиску на ці грані:

$$- \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz;$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz.$$

Визначимо величини проекцій масових сил, що діють на виділений об'єм рідини.

Позначимо проекції одиничних масових сил на координатні

осі F_x , F_y , F_z . Тоді масові сили, що діють на паралелепіпед в проекціях на осі координат, будуть

$$\rho F_x dx dy dz,$$

$$\rho F_y dx dy dz,$$

$$\rho F_z dx dy dz,$$

де $\rho dx dy dz$ - маса паралелепіпеда

Враховуючи це, запишемо рівняння рівноваги паралелепіпеда в проекціях на осі координат:

$$\rho F_x dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0;$$

$$\rho F_y dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz = 0;$$

$$\rho F_z dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = 0.$$

Поділивши всі рівняння на масу паралелепіпеда $\rho dx dy dz$, отримаємо

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

$$F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Це є система диференціальних рівнянь рівноваги рідини Л. Ейлера.

Основне рівняння гідростатики. Закон Паскаля

Перетворимо систему диференціальних рівнянь Ейлера, для чого кожне з них помножимо відповідно на dx , dy , dz :

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} dx; \\ dy; \\ dz. \end{aligned} \quad \begin{aligned} F_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= 0; & F_z dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= 0; \\ F_y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= 0; \end{aligned}$$

$$F_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0;$$

$$F_y dy - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0;$$

$$F_z dz - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0.$$

Склавши отримані рівняння, будемо мати:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Тричлен в дужках цього рівняння є повний диференціал функції тиску $p(x, y, z)$, тобто

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp.$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz - \frac{1}{\rho} dp = 0$$

Проінтегруємо рівняння для випадку, коли вісь z вертикальна і рідина знаходиться під дією тільки сил тяжіння.

У цьому випадку проекції одиничних масових сил на координатні осі будуть відповідно дорівнювати:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -g.$$

Підставимо ці значення в рівняння і отримаємо:

$$-g dz - \frac{1}{\rho} dp = 0, \quad \text{або} \quad dp = -\rho g dz.$$

Після інтегрування : $p = -\rho g z + C,$

де p - тиск в довільній точці масиву рідини M ; C - постійна інтегрування.

Визначимо C з умов на границі масивів рідини і повітря. Рівняння справедливо для довільної точки даного об'єму рідини, в тому числі і точки A на вільній поверхні (рис. 2). Для цієї точки $p = p_0$; $z = z_0$, де p_0 - тиск на вільній поверхні рідини. Підставимо ці значення в рівняння і знайдемо C :

$$p_0 = -\rho g z_0 + C, \quad \text{звідки} \quad C = p_0 + \rho g z_0.$$

Підставимо значення C у вихідну формулу і матимемо:

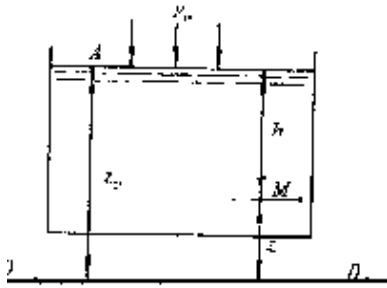
$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z),$$

або, після перетворень

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}$$

Оскільки точки A і M вибрані довільно, то для будь-яких двох довільних точок даного об'єму нерухомої рідини можна записати:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}.$$



Це і є основне рівняння гідростатики. Враховуючи, що $z - z_0 = h$, де h - глибина точки М, основне рівняння гідростатики можна записати у вигляді:

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Це рівняння дозволяє визначити тиск в довільній точці рідини, що знаходиться в стані спокою. Як видно з цього рівняння, тиск в довільній точці **М** складається із двох частин: тиску p_0 на вільній поверхні та тиску вищерозташованих шарів рідини $\rho g h$. Як можна помітити з формули, величина тиску p_0 однакова для всіх точок даного об'єму рідини.

Розглянемо останнє рівняння. Припустимо, що в першій точці тиск збільшився на Δp . Якщо об'єм рідини залишився в рівновазі, то в другій точці тиск теж повинен збільшитись на Δp . В противному разі порушиться рівновага. У такому випадку рівняння запишеться у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p}{\rho g} = z_2 + \frac{p_1 + \Delta p}{\rho g}.$$

Звідси можна сформулювати закон Паскаля: всяка зміна тиску в будь-якій точці нерухомої рідини, яка не порушує її рівновагу, передається у всі точки даного об'єму рідини без зміни.

Як показує рівняння, тиск в довільній точці рідини знаходиться в лінійній залежності від глибини і буде постійним для всіх точок, що мають однакову глибину h . Ці точки створюють поверхню рівного тиску. В розглядуваному випадку поверхні рівного тиску будуть представляти собою горизонтальні площини, паралельні вільній поверхні.

Атмосферний, манометричний і абсолютний тиск, вакуум.

Значення атмосферного тиску визначається силою тяжіння стовпчика повітря над точкою вимірювання і залежить від висоти точки вимірювання відносно поверхні Землі. Цей тиск іноді називають барометричним (вимірюється барометром). Найпростіший рідинний барометр: прозора трубка, накладена на шкалу, з якої видалене повітря і яка запаяна з одного кінця, а відкритим кінцем опущена в чашку з ртуттю. На вільну поверхню рідини діє атмосферний тиск, під дією котрого ртуть піднімається в трубці на висоту h м, яку можна визначити із співвідношення $h = p_{атм} / \rho_{ртг} g$, а знач. атмосферного тиску - $p_{атм} = \rho_{ртг} g h$ МПа.

Для вимірювання гідростатичного тиску в точках масиву рідини застосовуються різноманітні рідинні і механічні прилади. Пьезометри - прозорі трубки, накладені на шкалу, наповнені рідиною і одним кінцем з'єднані із ємністю, у якій вимірюють тиск, а з іншого кінця відкриті, сполучені з атмосферою (рис.). Висота підняття рідини в пьезометрі відповідає величині надлишкового тиску у ємності і називається пьезометричною висотою. Надлишковий тиск (понад атмосферний) називають також манометричним тиском,

Сума атмосферного (барометричного) і манометричного тисків називається абсолютним тиском:

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{бар}} + p_{\text{ман}}.$$

Пезометр — дуже точний і чутливий прилад, зручний для вимірювання невеликих тисків (0,03 - 0,04 МПа).

При вимірюванні більших тисків використовують манометри з важкими рідинами (напр. – ртуттю при тисках до 0,3 – 0,4 МПа) та механічні з трубкою Бурдона (до 60 і більше МПа).

Для виміру в ємності чи в трубопроводі тиску менше атмосферного застосовують вакуумметри, які подібні манометричним приладам.

$$1 \text{ технічна атмосфера} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10^4 \text{ кгс/м}^2 \approx 10^5 \text{ Н/м}^2 = 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ бар}.$$

Нормальному атмосферному тиску 101325 Па при 0°C, густині ртуті 13 596,7 кг/м³ при 0°C і нормальному прискоренні 9,80665 м/с² відповідає висота ртутного стовпчика 759,911 мм, води – (густина води при 0°C – 999,87 кг/м³) 10,3336 м водного стовпчика.